

南昌航空工业学院 2005—2006 学年第二学期期终考试

课程名称： 近世代数

A 卷

题号	一	二	三	四			合计
满分	18	30	28	24			100
实得分							

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 用拉格朗日定理判别，下列说法错误的是 ()

- A 素数阶的群必为循环群；
- B 10 阶群必无阶为 6 的元素；
- C 10 阶群必有 4 阶子群；
- D 群关于某子群的左陪集的个数与右陪集的个数相等。

2. 剩余类加群 Z_6 中，元素 $[2]$ 的阶是 ()

- A.1 B.2 C.3 D.6

3. 下列群必为循环群的是 ()

- A.3 元对称群 B. 有理数加群 C. 6 阶有限群 D.5 阶有限群

4. 设 $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$ ，那么 R 关于矩阵的加法和乘法构成环，则这个矩阵环是 ()

- A. 有单位元的可换环；
- B. 无单位元的可换环；
- C. 无单位元的非可换环；
- D. 有单位元的非可换环。

5. $Z[x]$ 为整系数多项式环，下面的理想是素理想的是 ()

- A.(x) B.(2x) C.(4) D.(x^2)

6. $\sqrt[3]{2}$ 在有理数域上的极小多项式为 ()

- A. $x^3 - 2$ B. $x^2 - 2$ C. $x^4 - 2x$ D. $x - \sqrt[3]{2}$

二、填空题(每空 3 分，共 30 分)

1. 若 f 为群 G 到群 H 的同态映射，则 f 为单同态当且仅当 $\text{Ker}f = \underline{\hspace{2cm}}$ ，为零同态

姓名
学号
班级

当且仅当 $\text{Ker}f = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 含有单位元的无零因子的交换环称为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 交换的除环称为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $a, b \in I$, 若 $b|a$, 但 b 不是单位, 且 b 与 a 不相伴, 则称 b 是 a 的 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 剩余类环 Z_m 是无零因子环的充要条件是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 Q 为有理数域, $S = \{\sqrt{2}\}$, 则 $Q(S) = \underline{\hspace{2cm}}$ (用集合的形式写出表达式).

6. $\sqrt[4]{2}i$ 在有理数域 Q 上的次数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设有限域 F 的阶为 81, 则 F 的特征 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 在整环中, 素元生成的理想为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、问答题 (前两题各 10 分, 后一题 8 分, 共 28 分)

1. 设 $B_4 = \{e, a, b, ab\}$ 乘法表为

0	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

以上定义的群叫做 Klein 四元群(简称四元群)

(i) 找出 B_4 的所有子群.

(ii) 找出与 B_4 同构的 S_4 (4 元对称群)的子群.

2. 设 \mathbb{Z} 是整数环。

(i) 找出整数环 \mathbb{Z} 的所有理想。

(ii) 找出整数环 \mathbb{Z} 中的全部可逆元。

3. 设 F 是域，问多项式环 $F[x]$ 的主理想 (x^2) 含有哪些元？ $F[x]/(x^2)$ 含有哪些元？

四、证明题(每题 8 分，共 24 分)

1、设 $G = \{(a, b) \mid a, b \text{ 为任意实数, } a \neq 0\}$. 规定

$$\text{对于 } a, b \in G, (a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$$

证明： (G, \circ) 为群。

2. 设 H_1 是群 H 的正规子群, K_1 是 K 的正规子群

证明: (1) $H_1 \times K_1$ 是 $H \times K$ 的正规子群

$$(2) H \times K / H_1 \times K_1 \cong H / H_1 \times K / K_1$$

3. 设 I 是环 R 的一个理想, 求证

$$A = \{r \in R \mid \text{对任意的 } x \in R, \text{ 有 } xr \in I\}$$

是 R 的一个理想, 并包含 I .

作者: 邹群

发布网站: <http://hanhai.org>

邮箱: nchy_zouzij@163.com

