南昌航空工业学院2004－2005学年第二学期　补考

课程名称：近世代数　　　　　　答案

题号	一	二	三	四	五	六	七	八				合计
满分	15	10	10	15	15	15	10	10				100
实得分												

1. （15 分）设 G＝{所有整数的集合}。对 G 规定

$$a \circ b = a + b - 3$$

证明 G 关于运算$\circ$构成群。

证明: (1)对任意整数 a,b, $a+b-3$为整数,所以运算封闭.

(2)任取 a,b,c$\in$G, $(a\circ b)\circ c=(a+b-3)\circ c=a+b+c-6$

$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c-3)=a+b+c-6$$

运算有结合律

(3)因为$a\circ 3=a+3-3=a, 3\circ a=3+a-3=a$,所以 3 为单位元.

(4)因为对于 a$\in$G, $a\circ(3-a)=a+3-a=3,(3-a)\circ a=3-a+a=3$,所以任一元均有逆.

2.（10 分） 找出模 6 的剩余类环的所有理想。

解:所有理想为([1])=Z/(6),([2])={[2],[4],[0]},([3])={[3],[0]}

3.（10 分）证明：一个循环群一定是交换群。

证明:设 G 为循环群,生成元为 a,任取 G 中两个元素,据循环群的定义,此两个元素必可表示成a^k, a^t(其中$k,t\in Z$)的形式.因此:

$$a^k a^t = a^{t+k} = a^t a^k$$

因此证得 G 为交换群.

4.(15 分)证明: 假定 H 是 G 的子群，N 是 G 的正规子群，证明 HN 是 G 的子群。

证明:任取$ab\in HN, cd\in HN(a,c\in H, b,d\in N)$,则:

$$ab(cd)^{-1}=abd^{-1}c^{-1}$$

因为$b,d\in N$且 N 为正规子群,所以$bd^{-1}\in N$且存在$h\in N$, 使得$bd^{-1}c^{-1}=c^{-1}h$,故:

$$ab(cd)^{-1}=abd^{-1}c^{-1}=ac^{-1}h\in HN.$$

综上, HN 是 G 的子群.

5.(15 分)证明：两个理想的交集还是一个理想。

证明:设 H,K 为环 R 的两个理想.任取$a,b\in H\cap K$.因为 H,K 为理想,它们关于加法为群,所以$a-b\in H\cap K$,故$H\cap K$关于加法为 R 的子群.另外,对于任意$c\in R$,据 H 为理想.有$ac\in H, ca\in H$.同理$ac\in K, ca\in K$.总之$ac\in H\cap K, ca\in H\cap K$.所以$H\cap K$为理想.

6.(15 分)叙述在整环中因子、相伴元、素元与既约元的定义。并举一个既约元的例子。

答:整环 G 中若有三个元素 a,b,c,满足 a=bc,则称 b 为 a 的因子.若上式中 c 为可逆元(单位),则称 a,b 相伴.若对于 G 中的某元素 a,a\bc,蕴含 a\b 或 a\c,则称 a 为素元.若 a=bc 蕴含 b 或 c 为单位,则称 a 为既约元.例如整数环中 3 为既约元.

7．(10 分)证明:整数环($\mathbb{Z}$,+,·)与偶数环(A, +,·)同构(A 为偶数集).

证明:构造 $\mathbb{Z}$ 到 A 的映射 f: 对于 $\mathbb{Z}$ 中任意元素 a,f(a)=2a.

因为对$a,b\in\mathbb{Z}$,但$a\neq b$,有$2a\neq 2b$,即$f(a)\neq f(b)$,所以 f 为单射;又对于任一偶数,必有 2k(k∈$\mathbb{Z}$)的形式,故 $f^{-1}(2k)=k$,所以 f 为满射.

最后:f(a+b)=2(a+b)=f(a)+f(b)所以同构.

8.(10 分)判断在 $\mathbb{Z}_2$ 中 x^4+1是否可约,如可约则将它完全分解.

解:将 1 代入x^4+1,得 1+1=0,因此x^4+1有因子(x+1),所以x^4+1可约.完全分解:

$$x^4+1=(x^2+1)(x^2+1)=(x+1)^4.$$

作者：邹群

发布网站：http://hanhai.org

邮箱：nchy_zouzij@163.com